8 класс

1. Вася задумал четырёхзначное число и для каждой пары его соседних цифр выписал на доску их произведение. После этого он стёр одно произведение, и на доске остались числа 20 и 21. Какое наименьшее число мог задумать Вася?

2. Трое друзей живут в домах с разными номерами. Оказалось, что у каждого из них номер этажа совпадает с номером дома одного из его друзей. Может ли эта ситуация сохраниться, если

а) один из друзей переедет в своём доме на один этаж выше?

б) каждый из друзей переедет в своём доме на один этаж выше?

3. Последнюю цифру четырёхзначного числа переставили в начало (например, $1234 \to 4123$) и полученное число сложили с исходным. Сумма оказалась равной 3333. Чему равно исходное число, если известно, что в его записи нет цифры 0? Найдите все возможные варианты.

4. Квадрат 10×10 разрезали по клеточкам на 17 прямоугольников, у которых длины обеих сторон больше 1. Какое наименьшее число квадратов могло оказаться среди этих прямоугольников? Приведите пример такого разрезания.

5. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $AB = BC = CD$, $AO = 8$ и $\angle BOC = 120°$. Чему равно DO?

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.

9 класс

1. Число 400 разделили на четыре части так, что если к первой части прибавить 1, от второй отнять 2, третью умножить на 3, а четвёртую разделить на 4, то все результаты будут равными. На какие части разделили число 400?

2. В школе учатся мальчики и девочки. Средний возраст мальчиков отличается от среднего возраста девочек, но среднее этих двух чисел совпадает со средним возрастом всех школьников. Кого в школе больше — мальчиков или девочек?

3. Известно, что уравнения $x^2+ax+b=0$ и $x^3+bx+a=0$ имеют общий корень и $a>b>0$. Найдите его.

4. В школьном турнире по шахматам соревновались мальчики и девочки, причём мальчиков было в 5 раз больше, чем девочек. По правилам турнира каждый шахматист играл с каждым другим *дважды*. Сколько всего игроков принимали участие, если известно, что мальчики набрали в сумме ровно в два раза больше очков, чем девочки? (За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков.)

5. Точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC, M — середина дуги AC описанной окружности (не содержащей B). Известно, что $AB=15$, $BC=7$ и $MI=MO$. Найдите AC.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.

10 класс

1. В школе учатся мальчики и девочки. Средний возраст мальчиков отличается от среднего возраста девочек, но среднее этих двух чисел совпадает со средним возрастом всех школьников. Кого в школе больше — мальчиков или девочек?

2. На доске в строчку написаны двадцать троек. Поставив между некоторыми из них знак «+», Вася обнаружил, что сумма равна 600. Сколько плюсов поставил Вася?

3. Верно ли, что при любых a, b и c хотя бы одно из уравнений $ax^2 + 2bx + c = 0$, $bx^2 + 2cx + a = 0$, $cx^2 + 2ax + b = 0$ имеет решение?

4. В школьном турнире по шахматам соревновались мальчики и девочки, причём мальчиков было в 5 раз больше, чем девочек. По правилам турнира каждый шахматист играл с каждым другим *дважды*. Сколько всего игроков принимали участие, если известно, что мальчики набрали в сумме ровно в два раза больше очков, чем девочки? (За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков.)

5. Угол A ромба $ABCD$ равен $60°$. Прямая, проходящая через точку C, пересекает отрезок AB в точке M и прямую AD — в точке N. Докажите, что угол между прямыми MD и NB равен $60°$.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.

11 класс

1. В школе учатся мальчики и девочки. Средний возраст мальчиков отличается от среднего возраста девочек, но среднее этих двух чисел совпадает со средним возрастом всех школьников. Кого в школе больше — мальчиков или девочек?

2. Докажите, что для любых неотрицательных чисел x и y справедливо неравенство:

$$2^x x + 2^y y \geqslant 2^y x + 2^x y\,.$$

3. Точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC, M — середина дуги AC описанной окружности (не содержащей B). Известно, что $AB = 15$, $BC = 7$ и $MI = MO$. Найдите AC.

4. Найдите все пары натуральных чисел a и b такие, что $3^a + 4^b$ является квадратом целого числа.

5. Даны n различных положительных чисел. Из них составляются суммы с любым числом слагаемых от 1 до n.

а) Какое наименьшее количество различных сумм можно получить?

б) Какое наибольшее количество различных сумм можно получить?

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.